

Seminar „Physik der Musikinstrumente“
Klavier II - Anschlag, Wechselwirkung von Saiten, Steg und Resonanzboden

Matthias Lohr

matthias.lohr@stud.uni-regensburg.de

19. Mai 2005

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einführung
 - Die Entstehung des Klaviers
 - Der Aufbau von Klavier und Flügel

- 1 Der Anschlag
 - Die Mechanik
 - Der Hammer
 - Die Pedale

- 1 Die Wechselwirkungen von Saiten und Steg
 - Sofort- und Nachklang
 - Der Einfluss des Stegs

- 1 Zusammenfassung

Einführung

Die Entstehung des Klaviers:

- Name kommt vom frz. „clavier“ (Tastatur)
- Es entwickelte sich ca. ab dem 15. Jhd. aus dem Clavichord
- Im Jahre 1709 baute Bartolomeo Cristofori den ersten Prototypen des heutigen Klaviers: die Saiten wurden erstmals mit einem Hammer angeschlagen (Hämmerchen mit Leder bespannt)
- Ein paar Jahre später entstand die sog. „Gleichklanggruppe“ (2-3 Saiten pro Ton)
- Heutiges Klavier auch unter dem Namen „Pianoforte“ bekannt

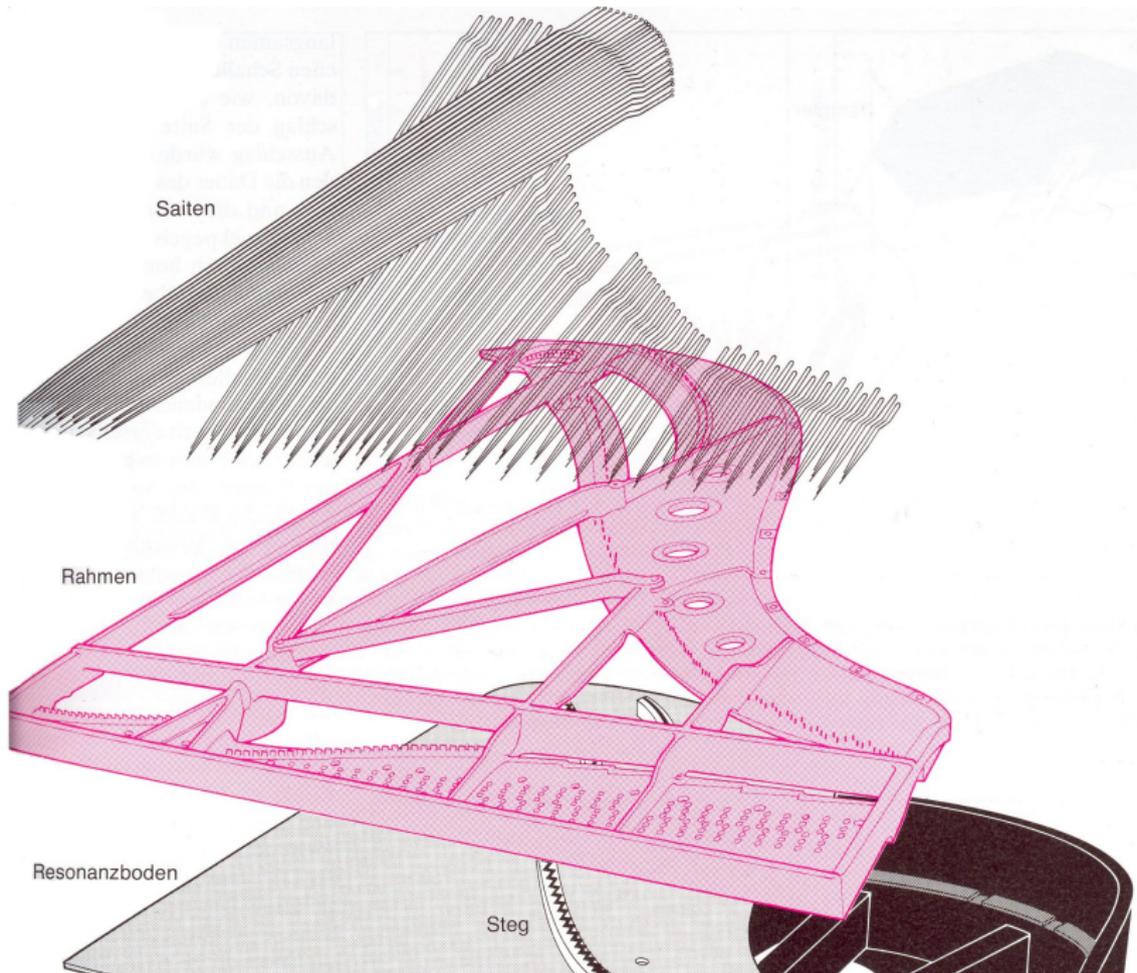
Das Hammerklavier:

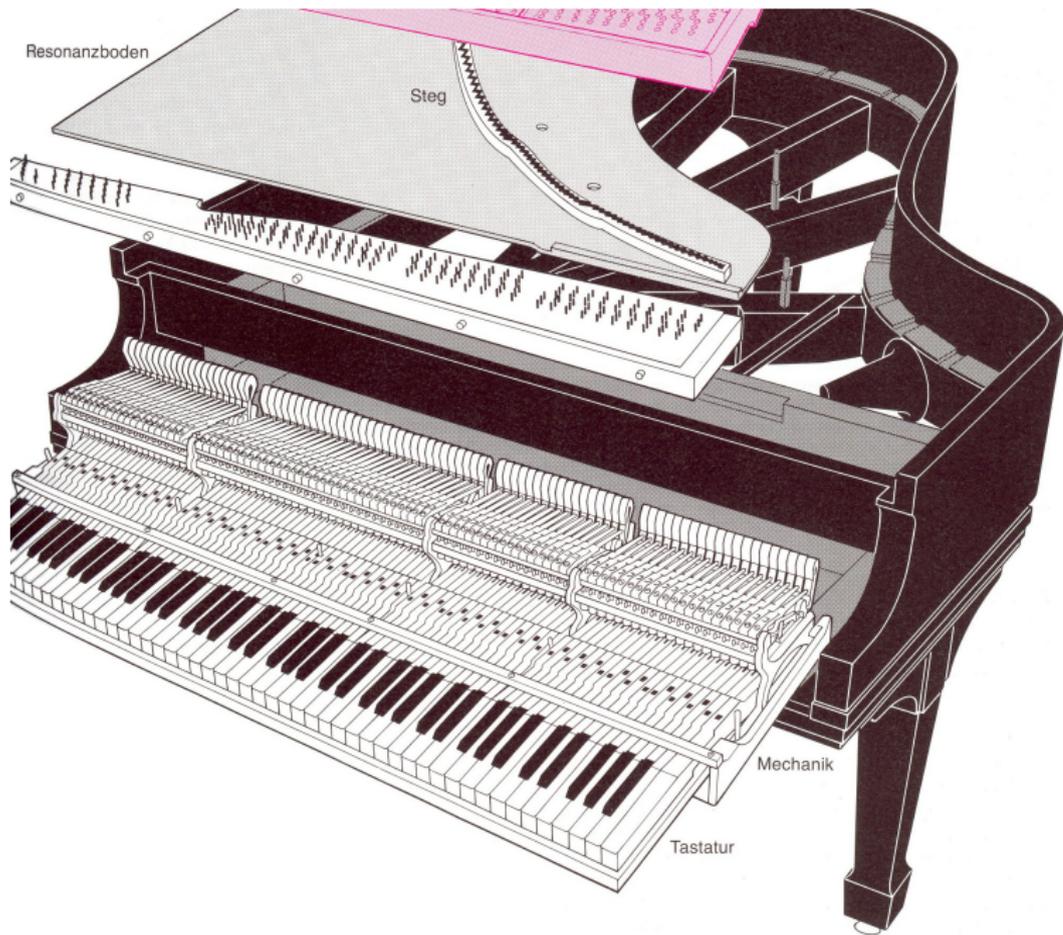
- Hämmerchen sind aus Holz, wiegen nur 1 – 2g und meist mit Leder bespannt
- Rahmen aus Holz, Saiten relativ schwach gespannt
→ Dadurch viel leiser als Klavier
- Klangboden nur ca. 4mm dick
- „Nur“ 6 Oktaven Umfang ($\sim 7\frac{1}{2}$ beim Klavier)
- Bis zu 4 Pedale: 3 wie Klavier, zusätzliches „Fagottpedal“

Unterschied Klavier und Flügel:

- Klavier: Saiten senkrecht; Hammer trifft waagrecht von vorne
- Flügel: Saiten waagrecht; Hammer trifft senkrecht von unten
- Durch größere Länge mehr Klangfülle beim Flügel, allerdings auch mehr Platzbedarf
- Resonanzboden beim Klavier rechteckig

- Im Diskantbereich fehlen die Dämpfer
- Saiten werden meist bei $\frac{1}{8}$ angeschlagen
- Zwischen Steg und hinterer Befestigung schwingen Saiten in Obertönen mit
- Kraft wird von Metall- auf Holzrahmen übertragen





Ein paar Zahlen:

- Klavier besitzt ca. 240 Saiten, meist doppelt und dreifach angeordnet
- Sehr großer Tonumfang ($7\frac{1}{2}$ Oktaven) und daraus resultierende Verbreitung des Klaviers
- Saitenlänge variiert von etwa 5cm bis 2m
- Spannung der Saiten erreicht ca. 3kN
- Saiten sind aus Stahl, untere Oktaven zusätzlich mit Metall umwickelt
- Stahlrahmen wiegt zwischen 120kg und 180kg (Gesamtgewicht etwa 580kg)

Der Anschlag

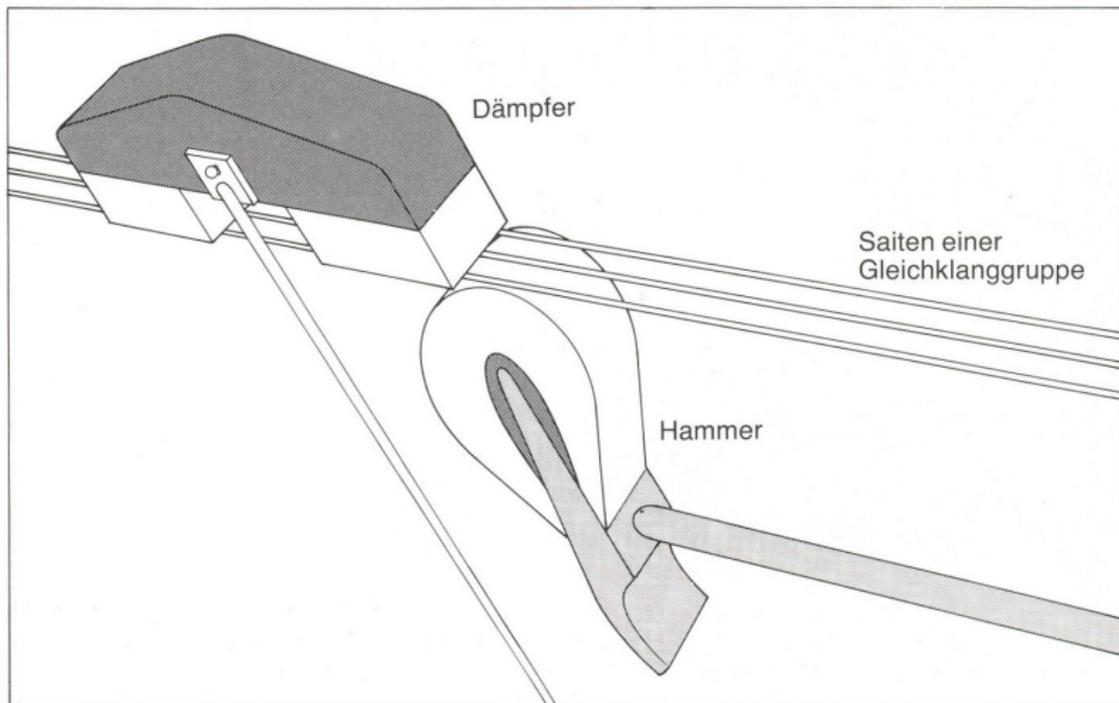
Der Anschlag:

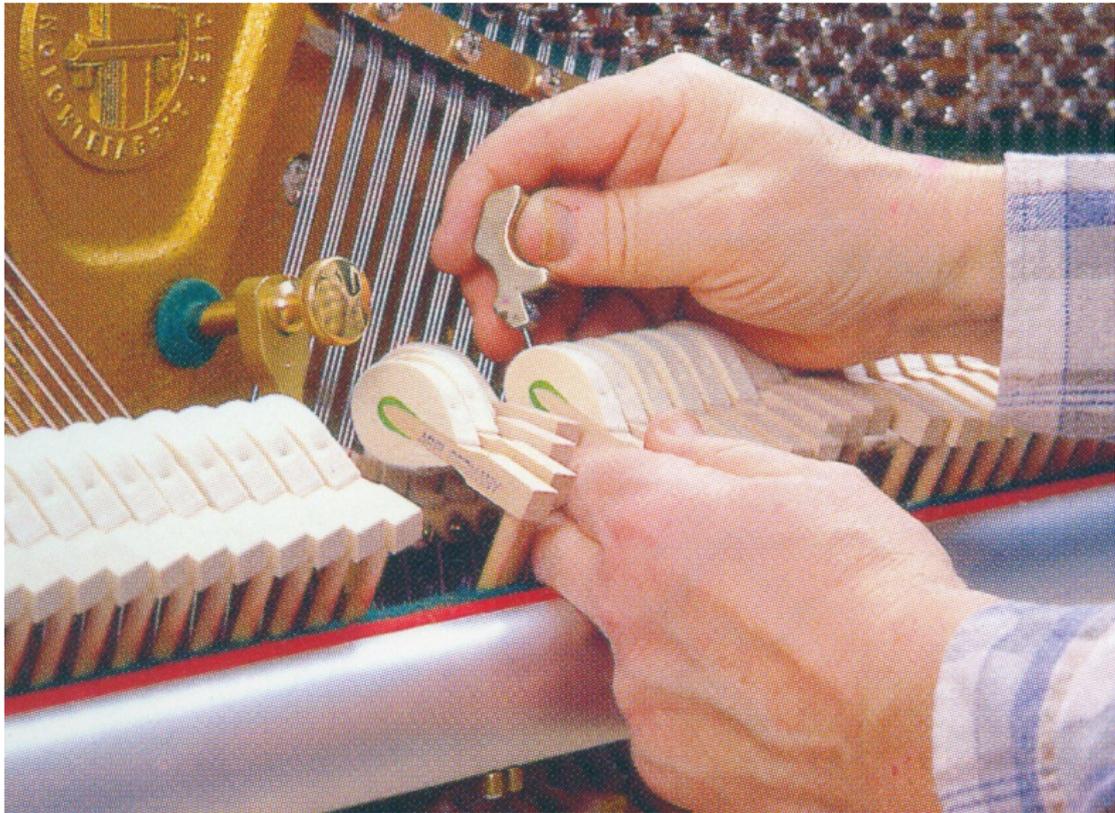
- Anschlag bzw. Hammer ist sehr wichtig, er charakterisiert das Klavier
- Stärke (Geschwindigkeit) des Anschlags durch Musiker beeinflussbar (im Gegensatz z.B. zum Cembalo)
- Erst dadurch großer Dynamikumfang und Ändern des Klanges möglich

Die Aufgabe der Mechanik:

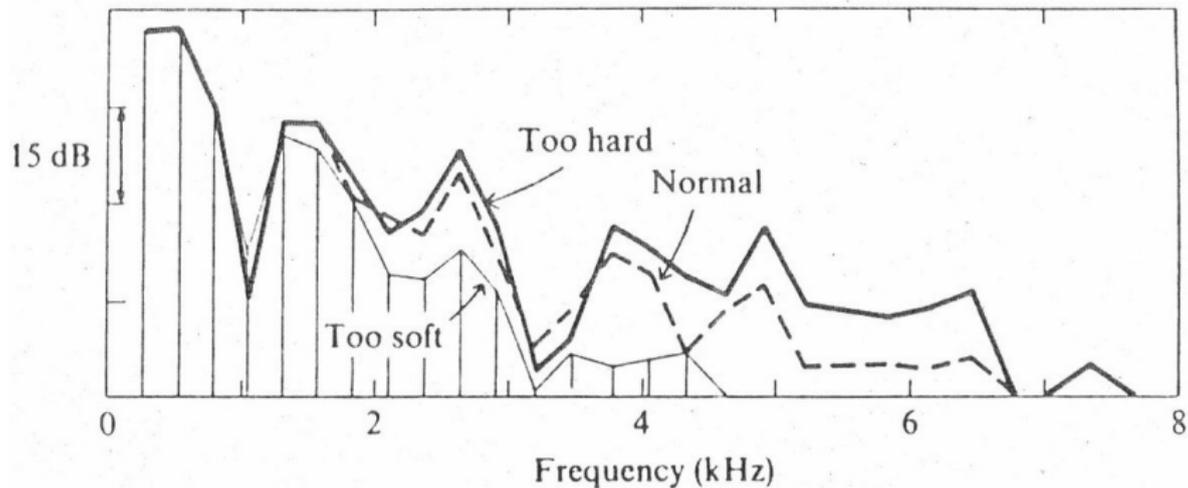
- Abdämpfen der Saiten, die gerade nicht schwingen
- Anschlagen der Saiten durch den Hammer
- Beeinflussung des Klanges durch die Pedale
- Verändern des Tones (Sofort-/Nachklang)

Der Hammer:





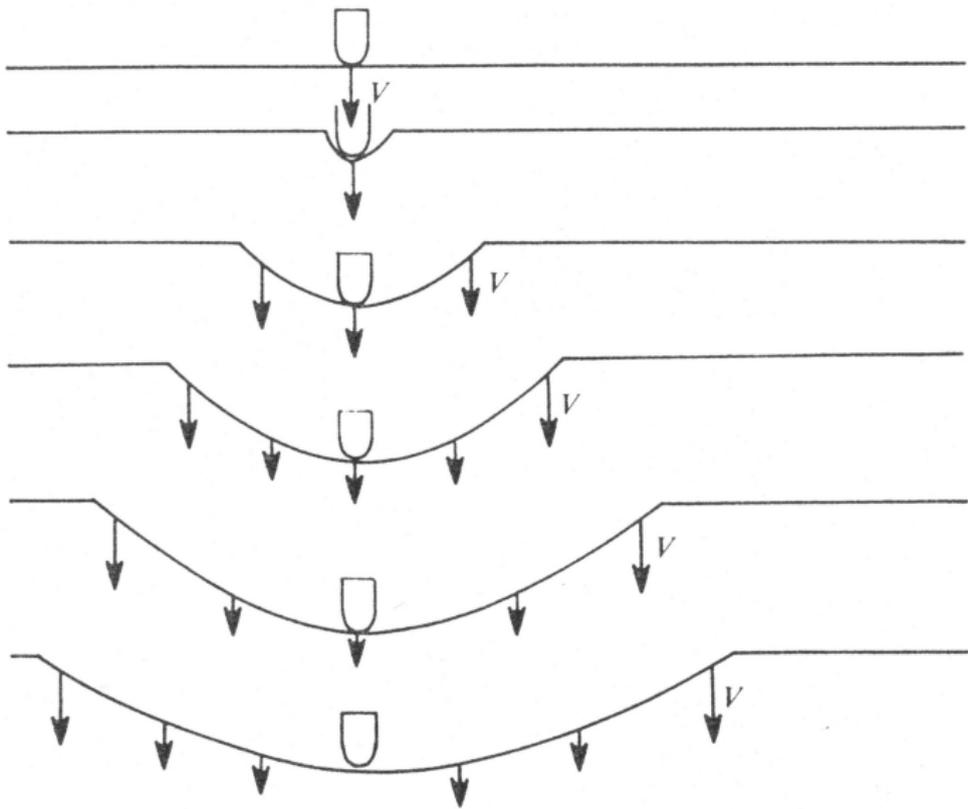
Auswirkung der Härte des Filzes: (Ton C₄ eines Flügels)



Das Anschlagen der Saite:

- Unterschied zur gezupften Saite (bei $t = 0$):
Anfangsauslenkung $y_0 = 0$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \neq 0$
- Anfangsgeschwindigkeit wird ausschließlich vom Hammer induziert
- Problem: kein instantaner Übertrag, es existiert eine Kontaktzeit
- Dadurch komplizierte Vorgänge während des Anschlags (abhängig von: Form, Härte und Masse des Hammers, Masse, Steifigkeit Spannung der Saite, . . .)

- Anfangsbedingung der Saite wie oben; Geschwindigkeit des (harten und schmalen) Hammers: $v_{0,H}$, Masse: m_H
- Zeit $t_0 < t \leq t_{\text{Kontakt}}$ nach Anschlag:
Der Teil $2ct$ der Saite mit der Masse $m_S = 2\mu ct$ ist in Bewegung (μ Längendichte und c Schallgeschwindigkeit)
- Wenn $m_H = m_S$ wird die Hammerbewegung gestoppt (idealer Hammer)
- Problem: Da Saitenlänge begrenzt, ergeben sich Reflexionen des Pulses an beiden Enden der Saite
- Durch Interaktion zwischen Hammer und Saite wird der Hammer letztendlich von der Saite zurückgeworfen



Genauere Betrachtung des Anschlags:

Am Berührungspunkt erfüllen Hammer und Saite die Gleichung

$$F = m_H \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \cdot \Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

Der Rest der Saite gehorcht weiterhin der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\nu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

mit $T =$ Zugkraft, $\nu =$ „Längendichte“ und $\sqrt{\frac{T}{\nu}} = c$
Schallgeschwindigkeit.

Dabei stellt $\Delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$ die Nichtstetigkeit der Saitensteigung dar; sie ist verantwortlich für die Kraft, die den Hammer verzögert.

Die Geschwindigkeit des Hammers kann am Kontaktpunkt durch folgenden Ansatz (näherungsweise) beschrieben werden:

$$v(t) = v_{0,H} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dabei ist $\tau = \frac{m_H c}{2T}$ die „Verzögerungszeit“.

Die dazugehörige Auslenkung ergibt sich zu:

$$y(t) = v_{0,H} \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Die Auslenkung des Kontaktpunktes erreicht den Wert $v_{0,H} \cdot \tau = \frac{v_{0,H} m_H c}{2T}$, die Geschwindigkeit sinkt auf 0.

- Abbremsen des Hammers erfolgt nur bei sehr langer Saite oder sehr leichtem Hammer
- Falls Hammer vor dem Eintreffen reflektierter Pulse die Saite wieder verlässt, schwingt sie in ihren Normalmoden
- Moden mit kürzerer Periode als die Kontaktzeit werden nur schwach angeregt, ebenso wie höhere Moden bei stark gespannten bzw. steifen Saiten
- Aufgrund von Steifigkeit werden höhere Moden geringer angeregt (→ Basssaiten)

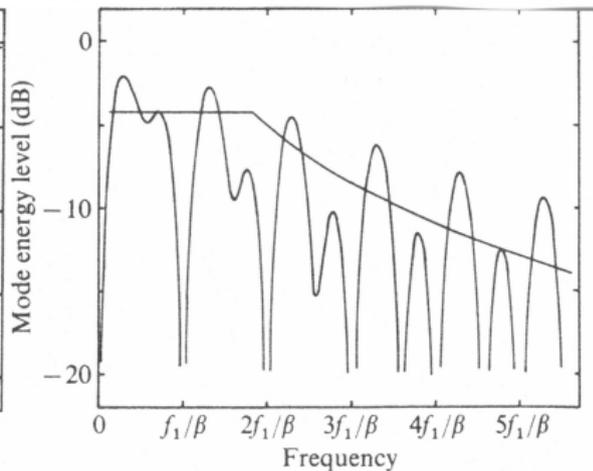
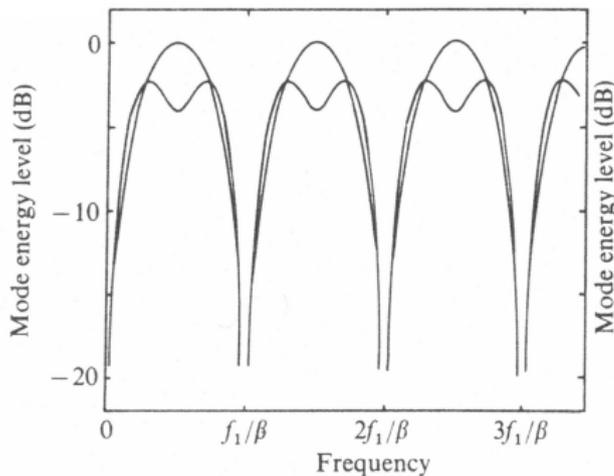
Im Gegensatz zur gezupften Saite fällt die Intensität der höheren Moden bei idealem (leichtem und schmalem) Hammer nicht ab.

Ganz anders beim realen Hammer, bei dem die Masse immer noch klein, aber nicht mehr vernachlässigbar ist. Bei ihm definiert die Gleichung

$$n = 0,73 \frac{m_S}{m_H}$$

die Modennummer, ab der die Intensität abzufallen beginnt.

Ideales und reales Modenspektrum: (Angeschlagen beim Bruchteil β)



Links: $m_H \ll m_S$

Rechts: $m_H = \frac{0,4}{\beta m_S}$

Der Einfluss der Mechanik auf die Dynamik des Anschlags:

Die Mechanik hat die Aufgabe, den Hammer mit einem zusätzlichen Hebel zu beschleunigen. Bei z.B. einem Steinway Flügel gilt das Verhältnis

$$\frac{v_H}{v_T} = 5,5$$

wobei v_H bzw. v_T die Geschwindigkeit des Hammer bzw. der Taste ist.

Dieses Verhältnis gilt während ca. 70% der Bewegung.

Mit eingesetzten Werten ergibt sich a_T zu

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = 3,3 (F - 0,44N)$$

Nehmen wir die Kraft F als konstant an. Die Tastendruckzeit errechnet sich mit dem Druckweg s zu $T = \sqrt{\frac{2s}{a_T}}$.

Dadurch ergibt sich mit einem Weg s von $9mm$

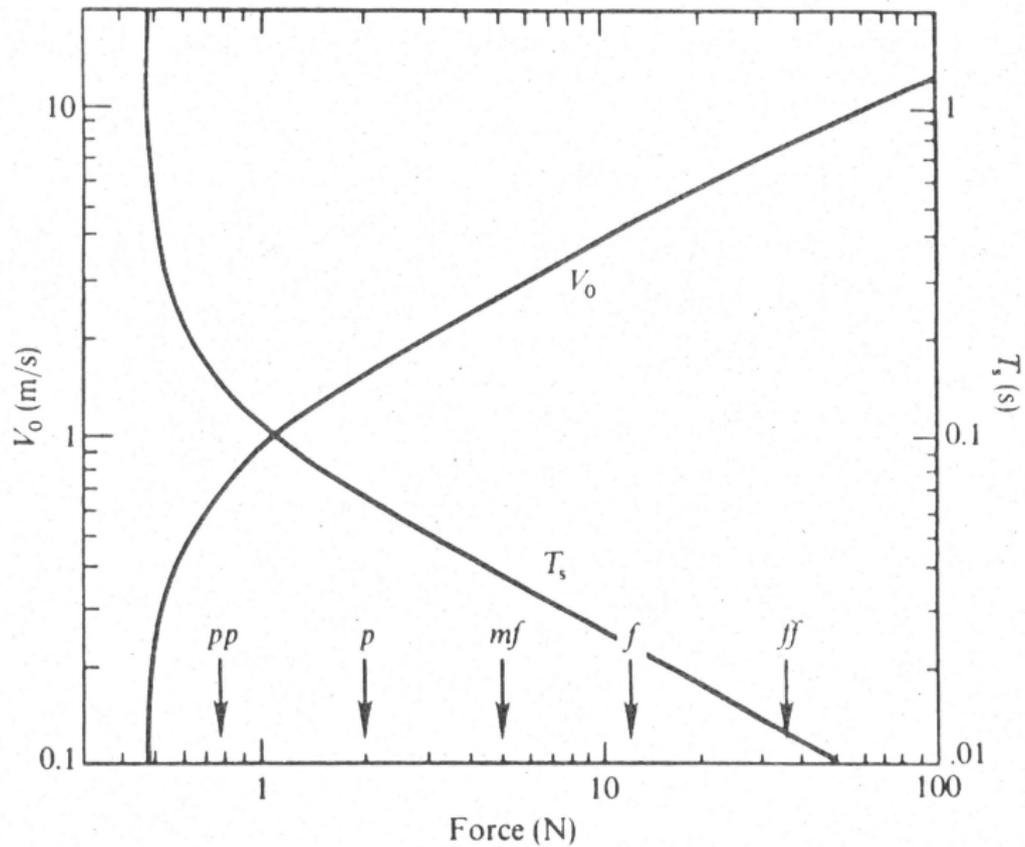
$$T = 0,074 \sqrt{F - 0,44N}$$

Es ergibt sich für die Endgeschwindigkeit des Hammers und somit die Anschlaggeschwindigkeit die Beziehung:

$$v_0 = 5,5 a_T T = 1,34 \sqrt{F - 0,44N}$$

T variiert (auf einem Steinway Flügel) typischerweise von $12ms$ im Fortissimo bis $140ms$ beim Pianissimo.

Mit dem Verhältnis der Zeiten von 11,5 ergibt sich ein Dynamikumfang von $21dB$. Ersetzt man die leichten Plastiktasten ($50g$) durch Holztasten ($130g$), vermindert sich die zu bewegende Masse am Druckpunkt um ca. 10%, wodurch sich v_0 bei gleichbleibender Kraft um 5% erhöht.



Je besser (und teurer) ein Klavier ist, desto weniger variieren die Gewichte der Tasten und damit die Anschlagskraft für die einzelnen Töne.

Benötigte Kraft bei einem Klavier hoher Qualität:

$$0,480\text{ N} - 0,488\text{ N}$$

Benötigte Kraft bei einem Klavier geringerer Qualität:

$$0,443\text{ N} - 0,532\text{ N}$$

Mittleres Pedal: (oder auch „Sostenuto“-Pedal)

Flügel:

Hält die Dämpfer der Saiten angehoben, die während der Betätigung des Pedals gedrückt wurden (manchmal auch nur bei den Basssaiten).

Klavier:

Wenn vorhanden, oft ein Übungspedal (feststellbar). Es senkt einen Filzstreifen zwischen Hammer und Saiten und dämpft somit die Lautstärke.

Rechtes Pedal:

Flügel und Klavier:

Es hebt pauschal alle Dämpfer an und erlaubt somit allen Saiten frei zu schwingen. Somit können sehr viele Zwischen- und Obertöne zum Mitschwingen angeregt werden.

Wechselwirkung von Saiten und Steg

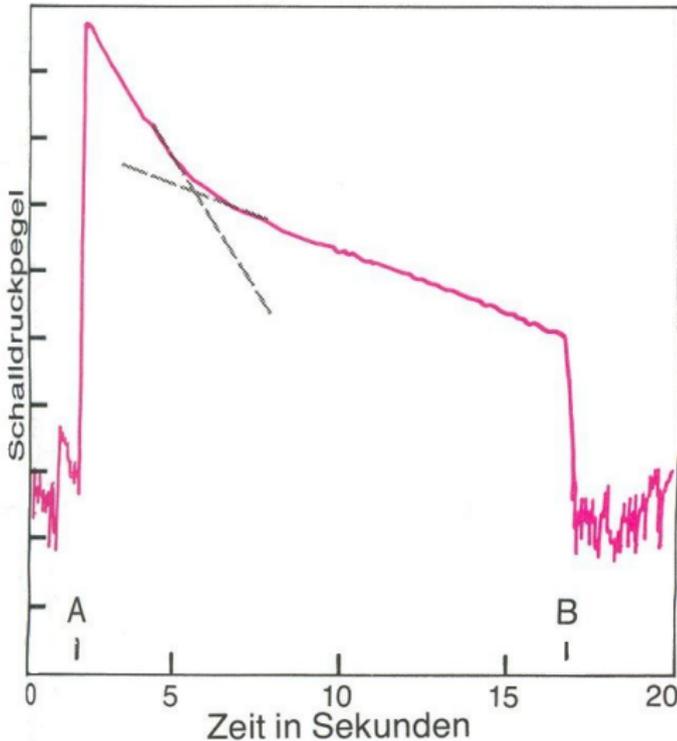
Sofort- und Nachklang:

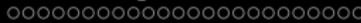
- Das moderne Klavier besitzt (normalerweise) 88 Tasten, davon 68 dreichörig, die restlichen 20 zwei- oder einchörig
- Ursprünglich zur Erhöhung der Lautstärke gedacht, beeinflusst die Verdopplung/Verdreifachung den Klang ganz charakteristisch
- Da bei der Klaviersaite Energiezufuhr nur beim Anschlag stattfindet, verändern sich die akustischen Eigenschaften mit dem Energieverbrauch in den Saiten (Reibung)

- Reibungskräfte sind proportional zur Bewegungsgeschwindigkeit (gedämpfter harmonischer Oszillator)
- Somit ergibt sich ein exponentieller Abfall der Schwingungsamplitude
- Bei logarithmischer Auftragung: linearer Abfall der Intensität; ähnlich dem Höreindruckes (\Rightarrow *dB*-Skala)

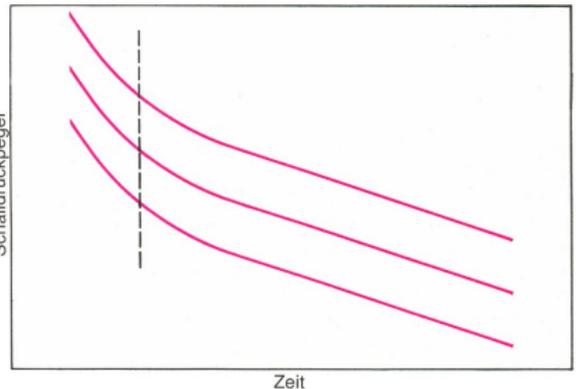
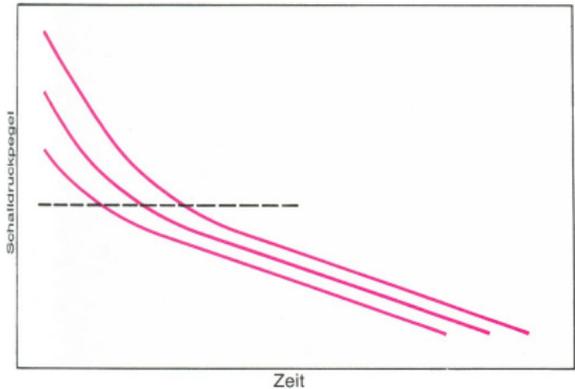
Genauere Betrachtung des Klanges:

- Das Klaviers weicht von diesem Verhalten ab
- Sein Klang weist einen Knick im Graphen auf, der durch zwei gerade Teilstücke genähert werden kann
- Der lautere, aber schneller abklingende Teil des Tones, wird Sofortklang genannt
- Der leisere, dafür länger klingende Teil, wird Nachklang genannt





Hypothetischer und wahrer Nachklang:



Diese Phänomen setzt sich aus zwei Effekten zusammen:

- 1 Horizontale und vertikale Saitenschwingung
- 2 Gekoppelte Schwingung einer Gleichklanggruppe

Horizontale und vertikale Saitenschwingung:

Aufgrund von kleinen Unregelmäßigkeiten schwingt eine Klaviersaite sowohl horizontal als auch vertikal, obwohl sie nur vertikal angeschlagen wird. Die vertikale Bewegung überträgt ihre Energie sofort auf den Steg/Resonanzboden und gibt sie somit als Schallwellen ab. Dies erzeugt den Sofortklang.

Die horizontale Schwingung kann (konstruktionsbedingt) nicht über den Steg abgegeben werden. Sie verliert ihre Energie langsamer und kann dadurch länger schwingen.

Die Vertikalschwingung ist ca. $20dB$ lauter als die Horizontalschwingung. Darauf basiert der Nachklang der monochörigen Basssaiten.

Gekoppelte Schwingung einer Gleichklanggruppe:

Zusätzlich verstärkt wird der Effekt durch die Gleichklanggruppe. Seine Funktionsweise basiert auf einem gekoppelten Schwinger:

Betrachten wir zwei Saiten:

Nach dem Anschlag schwingen beide in Phase mit o.B.d.A. leicht unterschiedlicher Amplitude. Auf den Steg wirkt somit eine Kraft, die die Summe der beiden Saiten darstellt. Dadurch wird mehr Klang über den Resonanzboden abgestrahlt und die Schwingung klingt schnell ab. Dies entspricht wieder dem Sofortklang.

Sobald eine der beiden Saiten zur Ruhe gekommen ist, überträgt sich wie beim gekoppelten Pendel Energie von der einen Saite auf die andere. Dadurch verringert sich der Energieübertrag auf den Steg und der Energieverlust in Form von Schallwellen wird deutlich gesenkt. Dies ergibt den Nachklang.

Auswirkung des Pianopedals:

Wir das Pianopedal gedrückt, werden anstatt drei nur noch zwei Saiten angeschlagen. Es wird also von Anfang an eine antisymmetrische Schwingung angeregt. Diese führt zu deutlich leiserem Sofortklang, der aber nur sehr langsam an Intensität verliert. Der Ton bleibt auch bei Pianostellen deutlich hörbar.

Der Einfluss des Stegs

Das Klavier würde ohne den Resonanzboden einen deutlich anderen Klang haben und viel leiser sein. Es muss die Energie des Anschlages also von der Saite auf diesen übergehen.

Das Bindeglied ist der Steg. Ihm kommt aber neben der Aufgabe, die Energie der Saiten auf den Resonanzboden zu übertragen auch noch eine kompliziertere Aufgabe zu. Da er das bewegliche Ende der Saiten darstellt, wirkt sich sein Verhalten merklich auf den Klang aus.

Drei mögliche Randbedingungen:

- ① Die reibungsfrei federnde Befestigung
- ② Die massereiche, reibungsfrei bewegliche Befestigung
- ③ Die Reibung erzeugende Befestigung

Die reibungsfrei federnde Befestigung:

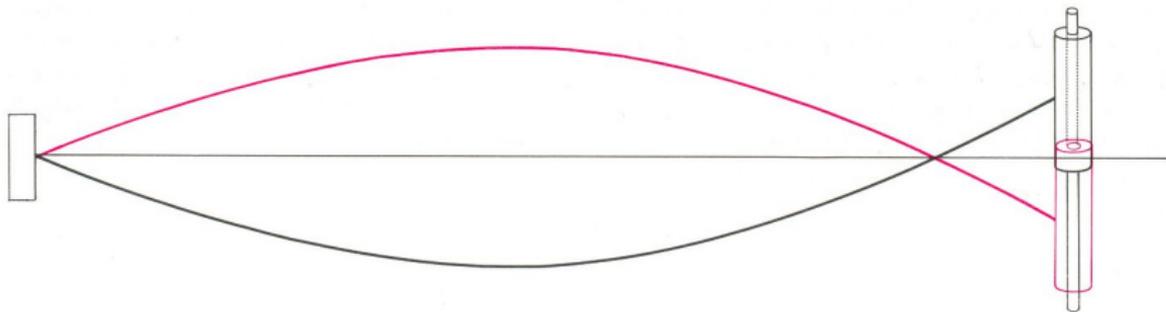
Die Saite ist an einem Ring befestigt, der sich reibungsfrei auslenken lässt, aber an eine Feder gekoppelt ist. Der Ring folgt somit der Bewegung der Saite und speichert bzw. verrichtet im Laufe einer Periode zweimal Arbeit.

Bei dieser Ankopplung verhält sich die Saite so, als wäre sie länger. Die Frequenz erniedrigt sich.

Die massereiche, reibungsfrei bewegliche Befestigung:

Hier ist die Saite an ein völlig frei bewegliches Massenstück gebunden, das sich ebenfalls reibungsfrei bewegen kann. Die Schwerkraft werde vernachlässigt. Das Massenstück bewegt sich solange in eine Richtung, bis es von der Saite entgegengesetzt beschleunigt wird. Die in die Masse übergehende Energie fließt wieder in die Saite zurück.

Bei dieser Ankopplung verhält sich die Saite so, als wäre sie kürzer. Die Frequenz erhöht sich.



Die Reibung erzeugende Befestigung:

Der Klaviersteg entspricht dem dritten Fall. Er kann mit einem frei beweglichen, aber durch Reibung gedämpften Ring beschrieben werden. Die Saite verrichtet Arbeit an ihm und verliert somit Energie. Weiterhin besteht zwischen Saite und Ring eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$.

Die Auswirkungen auf den Klang:

Wir nehmen zwei leicht verstimmte, gegenphasig schwingende Saiten an, die über den Steg miteinander gekoppelt sind.

Unmittelbar nach dem Anschlag ist der Steg in Ruhe. Durch die leicht abweichenden Frequenzen beginnen beide Saiten, Kraft auf den Steg auszuüben. Die Phasendifferenz zwischen der Kraft und der Summe der beiden Teilschwingungen ist ein Viertel der Schwingungsdauer. Bei den Amplitudenmaxima der Saiten heben sich die Kräfte aufgrund der verschiedenen Vorzeichen fast komplett auf; nur nahe der Nulldurchgänge haben sie das selbe Vorzeichen und üben somit dort die maximale Kraft aus.

Da der Steg nun eine Reibung erzeugende Befestigung ist, gerät er in eine um $\frac{\pi}{2}$ verschobene Schwingung.

Die Phasendifferenz addiert sich somit zu π . Der Steg schwingt also für die höher gestimmte Saite in Phase, für die andere gegenphasig. Die in Phase schwingende Saite erniedrigt deswegen seine Frequenz, die andere erhöht sie. Dadurch gleichen sich die Frequenzen beider Saiten an. Dies führt zu einem längeren Nachklang aufgrund der geringeren Dämpfung und einem reinen Klang.

Die Differenz der Frequenzen darf aber $\frac{1}{4}$ einer Periode nicht übersteigen, da sonst der Ausgleich unmöglich wird.

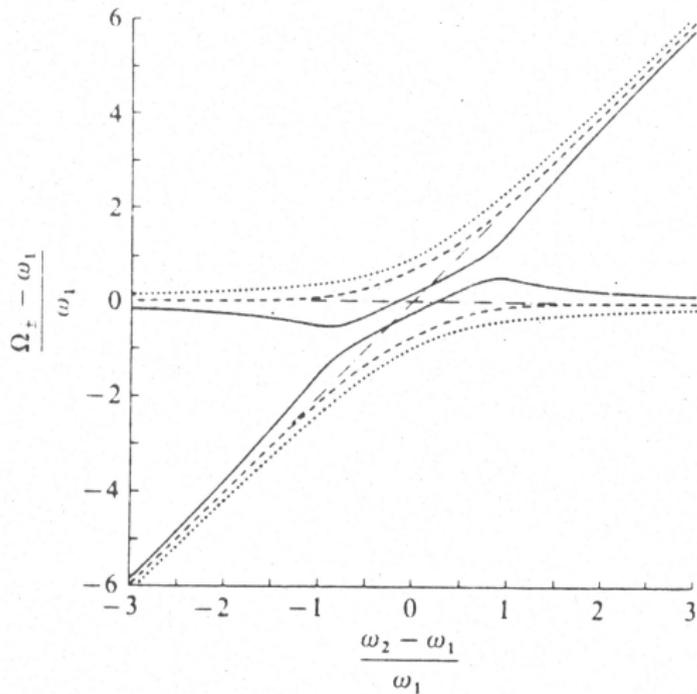
Dieses Verhalten gilt auch für anfangs in Phase schwingende Saiten. Der Sofortklang ist hier aufgrund der „Einschwingvorgänge“ allerdings lauter und kürzer.

Durch gezieltes Verstimmen lässt sich der Nachklang bewusst verändern, um z.B. die leicht abweichenden Eigenschaften der Saiten zu harmonisieren.

Der Effekt beruht auf der Theorie gekoppelter Oszillatoren. Je nach Art der Kopplung verändern sich die Frequenzverläufe der beiden Schwinger. Man unterscheidet folgende zwei Fälle:

- 1 Komplexe Impedanz
- 2 Reelle Impedanz

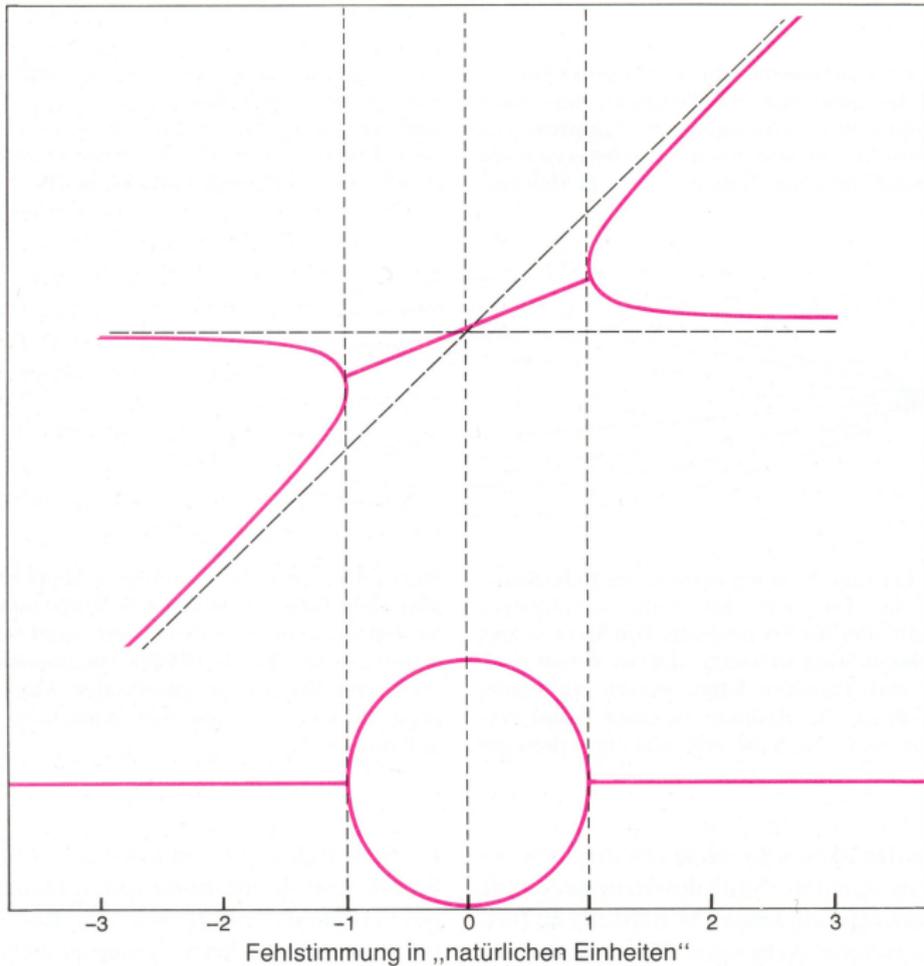
Bei komplexer Impedanz erreichen die zwei Schwinger zu keinem Zeitpunkt die selbe Frequenz. Die Kopplung schafft eine „Abstoßung“ zwischen den Normalmoden. Sie nähern sich nur mehr oder weniger aneinander an.



Gepunktete Linie: größte imaginäre Impedanz

Durchgezogene Linie: kleinste Impedanz

Abklinggeschwindigkeit \rightarrow Frequenz der gekoppelten Saiten



Frequenz der ungekoppelten Saiten

Zusammenfassung

- Der Anschlag (mit Mechanik und Hammer) begründete die herausragende Stellung des Klaviers in der Musikgeschichte
- Die komplizierten Wechselwirkungen von Hammer, Saiten, Resonanzboden und Metallrahmen, an denen sich schon Helmholtz versuchte, sind bis heute noch nicht vollständig verstanden

